2do parcial MA2112. Tipo C

Abril-Julio 2007.
Resolución realizada por: Osmar Betancourt
Carné: 16-10130. @BetancourtOsmar

Resolución

1. (12 ptos.) Consideremos la integral:

$$\int_{-1}^{3}\int_{0}^{1+\sqrt{3+2x-x^2}} f(x,y)\,dydx$$

(a) Dibuje la región.

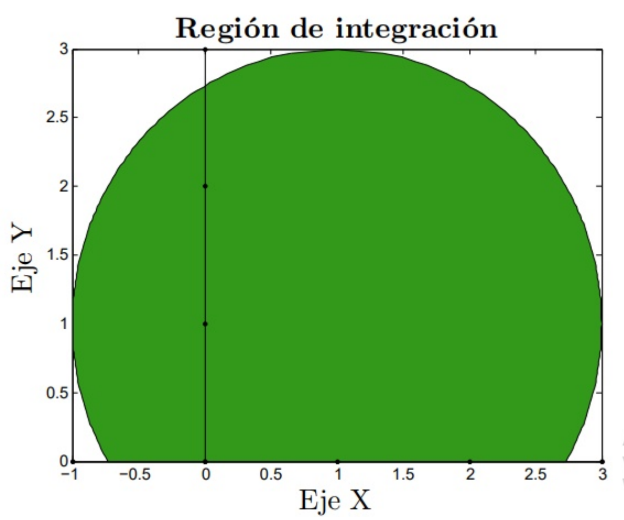
(b) Intercambie el orden de integración.

Lo primero que haremos será interpretar lo que nos indican los límites de integración, obsrvamos que tenemos $dydx$, de modo que los límites de integración externos corresponden a la variación de x y los límites internos corresponden a la variación de y en la región de integración. Esto implica que $-1 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 1+\sqrt{3+2x-x^2}$. Manipulemos para obtener la función a graficar.

$$y = 1+\sqrt{3+2x-x^2} \Rightarrow y-1 = \sqrt{3+2x-x^2} \Rightarrow (y-1)^2 = \left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = 3+2x-x^2 \Rightarrow (y-1)^2 = 3-(x-1)^2+1 \Rightarrow (y-1)^2+(x-1)^2 = 4$$

Lo cual es una circunferencia centrada en $(1,1)$ de radio 2. De modo que la región de integración nos quedaría así:



Ahora debemos de intercambiar el orden de integración, para ello observamos nuestra gráfica y se evidencia que $0 \leq y \leq 3$, haremos que x quede en función de y, así que procedemos a despejar x de la función que delimita unestra región:

$$(y-1)^2+(x-1)^2 = 4 \Rightarrow (x-1)^2 = 4-(y-1)^2 \Rightarrow |x-1| = \sqrt{4-(y-1)^2}$$

Utilizamos la definición de valor absoluto: $|x-1| = \left\{ \begin{array}{lll} x-1 & \text{si} & x \geq 1 \\ 1-x & \text{si} & x < 1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ si $x < 1 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{4-(y-1)^2}$, si $x \geq 1 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{4-(y-1)^2}$

De modo que si $x < 1$ nuestro límite inferior será $1 - \sqrt{4-(y-1)^2}$ y si $x \geq 1$, nuestro límite superior será $1 + \sqrt{4-(y-1)^2}$. Entonces la integral nos quedaría así:

$$\int_0^3 \int_{1-\sqrt{4-(y-1)^2}}^{1} f(x,y)\, dxdy + \int_0^3 \int_1^{1+\sqrt{4-(y-1)^2}} f(x,y)\, dxdy = \int_0^3 \int_{1-\sqrt{4-(y-1)^2}}^{1+\sqrt{4-(y-1)^2}} f(x,y)\, dxdy$$

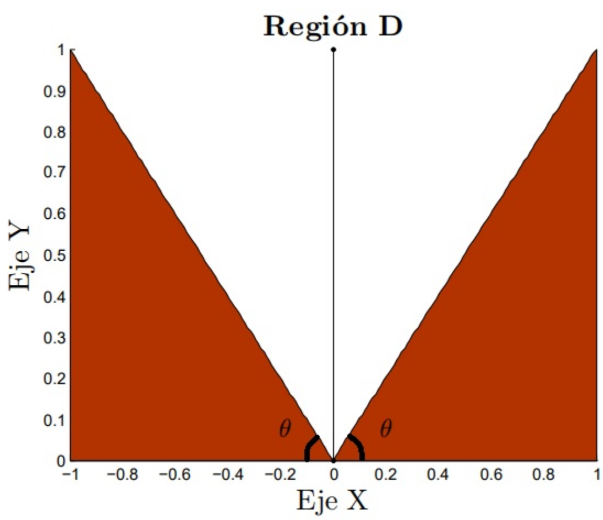
2. (12 ptos.) Utilizando coordenadas polares calcule la integral:

$$\int\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

Donde $D = \{(x,y) \,/\, |x| \leq 1; 0 \leq y \leq |x|\}$ Lo primero que debemos de hacer es resolver la desigualdad con valor absoluto que tenemos dentro de la región D, de donde obtenemos $-1 \leq x \leq 1$. Desarrollemos todos los datos para graficar a la región D.

$$|x| = \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{si} & x \geq 0 \\ -x & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq -x \\ \text{si } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq x \end{array} \right.$$

Graficamos D:



Realizamos los cambios de variables: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, donde $|J(r,\theta)| = r$. Ahora sustituimos y hallamos θ y r

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r\cos(\theta) \leq 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$0 \leq y \leq x \Rightarrow 0 \leq r\sin(\theta) \leq r\cos(\theta) \Rightarrow r\sin(\theta) = r\cos(\theta) \Rightarrow \tan(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Aplicamos el mismo procedimiento para hallar r y θ en el segundo cuadrante:

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq r\cos(\theta) \leq 0 \Rightarrow r\cos(\theta) = -1 \Rightarrow r = -\frac{1}{\cos(\theta)}$$

$$0 \leq y \leq -x \Rightarrow 0 \leq r\sin(\theta) \leq -r\cos(\theta) \Rightarrow r\sin(\theta) = -r\cos(\theta) \Rightarrow \tan(\theta) = -1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Por ende los radios irían de 0 a $\frac{1}{\cos(\theta)}$ y $-\frac{1}{\cos(\theta)}$ correspondientemente. Y los ángulos serían $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$. Las integrales resultantes son:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} \frac{r\sin(\theta)\,r}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}}drd\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\int_0^{-\frac{1}{\cos(\theta)}} \frac{r\sin(\theta)\,r}{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}}drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} \frac{r\sin(\theta)\,r}{\sqrt{r^2}}drd\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\int_0^{-\frac{1}{\cos(\theta)}} \frac{r\sin(\theta)\,r}{\sqrt{r^2}}drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} r\sin(\theta)\,drd\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\int_0^{-\frac{1}{\cos(\theta)}} r\sin(\theta)\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\theta)}{2\cos^2(\theta)}d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\sin(\theta)}{2\cos^2(\theta)}d\theta$$

Hacemos el cambio de variable $u = \cos(\theta)$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{u^2} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-1} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$$

Así que podemos concluir que:

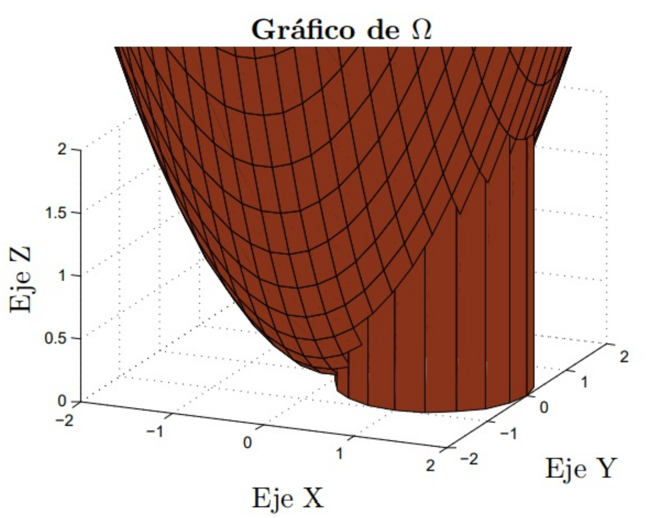
$$\int\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2} - 1$$

3. (12 ptos) Calcular el volumen del sólido

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \leq 2z;\ \ x^2+y^2 \leq 2x;\ \ z \geq 0\right\}.$$

$$V(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz$$

Lo primero que haremos será graficar el sólido Ω, donde modificamos $x^2 - 2x + y^2 \leq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ que es un cilindro centrado en $(1,1)$ y $x^2+y^2 \geq 2z$ que es un paraboloide, con $z \geq 0$.



Donde el sólido Ω es la parte dentro del cilindro y por debajo del paraboloide. Utilizaremos coordenadas cilíndricas para resolver este ejercicio:

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ z = z.\ |J(r,\theta,z)| = r$$

Sustituimos los cambios de variables para hallar los valores de z, r y θ.

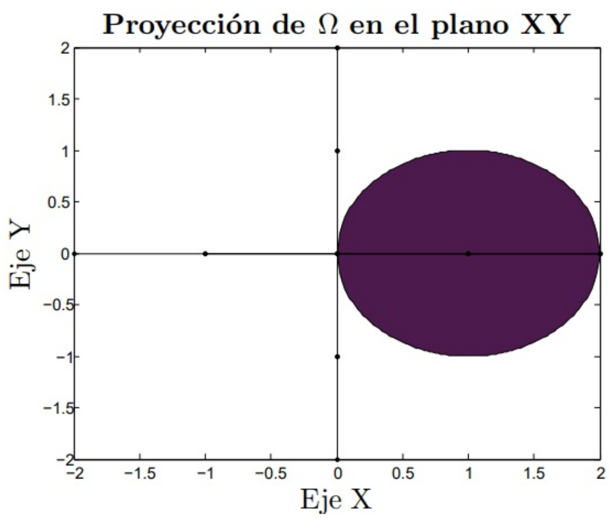
$$x^2 + y^2 \geq 2z \Rightarrow r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) \geq 2z \Rightarrow r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \geq 2z \Rightarrow r^2 = 2z \Rightarrow z = \frac{r^2}{2}$$

Ahora hallemos el valor de r, para ello utilizamos la ecuación que describe al cilindro.

$$x^2 + y^2 \geq 2x \Rightarrow r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) \geq 2r\cos^2(\theta) \Rightarrow r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) - 2r\cos(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 2r\cos(\theta) = 0 \Rightarrow r\left(r - 2\cos(\theta)\right) = 0$$

De donde obtenemos claramente que r varía entre 0 y $2\cos(\theta)$. Para hallar θ proyectamos Ω en el plano XY:



En donde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Por lo cual nos queda la siguiente integral:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos(\theta)}\int_0^{\frac{r^2}{2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos(\theta)} r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{r^2}{2}} r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^4\cos^4(\theta)}{4}d\theta$$

$$= \frac{16}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\theta)\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(4\theta)}{4}d\theta$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left.\frac{\sin(2\theta)}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{\sin(4\theta)}{16}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4} + 0 + 0 = \frac{3\pi}{4}$$

En conclusión nos queda que:

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \frac{3\pi}{4}$$

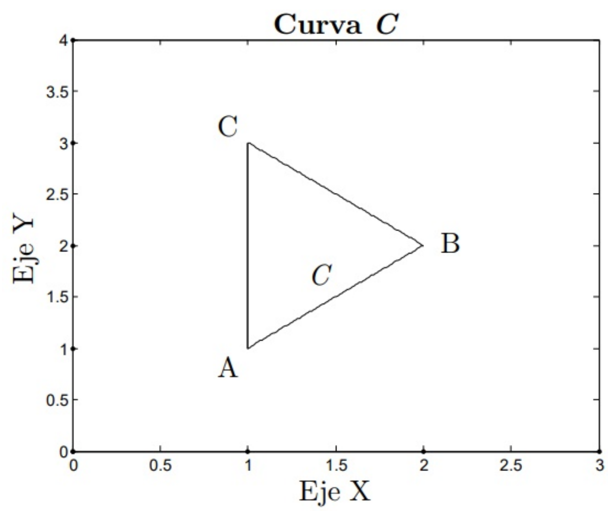
4. (12 ptos.) Sea C el contorno del triángulo de vértices A$= (1,1)$, B$= (2,2)$ y C 4$= (1,3)$, con la orientación horario. Calcular:

$$\int_C \left(2x^2 + 2y^2 + x^5 \ln\left(1 + x^2\right)\right) dx + \left((x+y)^2 + e^{\sin^4(y)}\right) dy$$

Graficamos la curva C. Para ello construimos dos rectas con los puntos dados y las unimos.

$$\overline{AB} : m = \frac{2-1}{2-1} = 1 \Rightarrow x - 1 = y - 1 \Rightarrow y = x$$

$$\overline{BC} : m = \frac{3-2}{1-2} = -1 \Rightarrow -(x-1) = y - 3 \Rightarrow y = 4 - x$$



Ya que C es una curva simple y cerrada, sólo falta que esté orientada en sentido antihorario para poder aplicar el teorema de Green, así que de ahora en adelante denotaremos $C^{\uparrow}$ como C recorrida en sentido horario y $C^{\downarrow}$ como C recorrida en sentido antihorario. Trabajeremos con $C^{\downarrow}$.

$$\int_{C^{\downarrow}} \left(2x^2 + 2y^2 + x^5 \ln\left(1 + x^2\right)\right) dx + \left((x+y)^2 + e^{\sin^4(y)}\right) dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

$$\text{Donde } F(x,y) = \begin{cases} P(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^5 \ln(1+x^2) \\ Q(x,y) = (x+y)^2 + e^{\sin^4(y)} \end{cases}$$

Tanto P como Q son de clase C^1 en D así que podemos aplicar el teorema de Green. Planteamos la integral doble y la resolvemos, recordando que los límites de integración ya los conseguimos al haber graficado la región.

$$\int_1^2 \int_x^{4-x} (2(x+y) - 4y)\, dydx = \int_1^2 \int_x^{4-x} (2x - 2y)\, dydx = \int_1^2 2xy\Big|_x^{4-x} dx - \int_1^2 \frac{2}{2} y^2\Big|_x^{4-x} dx$$

$$= \int_1^2 2x(4 - x - x)\, dx \int_1^2 \left((4-x)^2 - x^2\right) dx = \int_1^2 \left(8x - 4x^2\right) dx - \int_1^2 \left(16 - 8x + x^2 - x^2\right) dx =$$

$$\int_1^2 8xdx - \int_1^2 4x^2dx - \int_1^2 16dx + \int_1^2 8xdx = \frac{16}{2}x^2\Big|_1^2 - 16\left(2-1\right) - \frac{4}{3}x^3\Big|_1^2$$

$$= 8\left(4-1\right) - 16 - \frac{4}{3}\left(4-1\right) = 24 - 16 - \frac{28}{3} = -\frac{4}{3}$$

De donde podemos concluir que:

$$\int_{C^{\downarrow}} \left(2x^2 + 2y^2 + x^5\ln\left(1+x^2\right)\right)dx + \left(\left(x+y\right)^2 + e^{\sin^4(y)}\right)dy = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{C^{\uparrow}} \left(2x^2 + 2y^2 + x^5\ln\left(1+x^2\right)\right)dx + \left(\left(x+y\right)^2 + e^{\sin^4(y)}\right)dy = \frac{4}{3}$$

Recordando que $C^{\uparrow} \equiv C$.

Notificar en caso encontrar algún error.

Osmar Betancourt
16-10130@usb.ve

Resolución revisada por el prof. Humberto Valera.